

12. Rovnice a nerovnice s parametrem

$$\begin{array}{l} \text{př.} \\ 2(x-1) = 1(x-1) \\ 2(x-2) = 4(x-1) \\ 2(x-3) = 9(x-1) \\ 2(x-4) = 16(x-1) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{LZE STRUČNĚ ZAPISAT} \\ 2(x-p) = p^2(x-1) \\ \text{kde } x \in R \text{ nutně má} \\ p \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ parametru} \end{array} \right.$$

ROVNICE (PŘÍP. NEROVNICE) S PARAMETREM (PARAMETRICKÁ KČ, MNOŽ.)

- kápis množiny všech rovníc získaných dosazením čísel na parametru p k jeho definičnímu oboru (obd. pro množ.)
- pokud $D_p = R \Rightarrow$ dostaneme nekonečný počet rovnic odpovídající jedinou rovnici s parametrem p (obdobně pro množ.)
- ŘEŠIT RCI (NERCI) S PARAMETREM p znamená přivádět každou přípustnou hodnotu parametru $p \in D_p$ množinu kořenů
- ŘEŠENÍ: vyjadřuje přímou úpravu, úplný rozběr všech možných případů a přímý kápis

Příklady (A) LINEÁRNÍ ROVNICE

① Řeš v R : $x + p(x+p) = 1$ kde $p \in R$ parametru
(x nutně má)

$$x + p(x+p) = 1$$

$$x + px + p^2 = 1 \quad [\text{osamostatníme členy s mkn. } x]$$

$$x + px = 1 - p^2$$

$$D_x = R \quad D_p = R$$

$$(*) \quad x(1+p) = 1-p^2 \quad |: (1+p) \quad \text{CHCI DĚLIT? - MOHU?}$$

$$1+p = 0$$

$$p = -1$$

(dos. do (*) na p)

$$x(1-1) = 1-1^2$$

$$0x = 0$$

$$(0=0) \text{ platí }$$

$$K_0 = D_x = R$$

$$\underline{K_0 = R}$$

$$1+p \neq 0$$

$$p \neq -1$$

(máme dělit)

$$x = \frac{1-p^2}{1+p}$$

$$x = \frac{(1-p)(1+p)}{(1+p)}$$

$$x = 1-p$$

$$\underline{K_1 = \{1-p\}}$$

následky shromáždění do tabulky

ZÁVĚR:

p	K
$p = -1$	R
$p \neq -1$	$\{1-p\}$

② Řešit $x^2 - x = d - 1$ $x \in R$ nutná má, $d \in R$ parametr

$$x^2 - x = d - 1$$

$$D_x = R \quad D_p = R$$

(*) $x(x-1) = d-1$ | CHCI DĚLIT - ? MOHU
| : $x-1$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 1$$

dos. do (*)

$$x(1-1) = 1-1$$

$$0x = 0 \text{ pl.}$$

$$X_0 = D_x = R$$

$$x = -1$$

dos. do (*)

$$x(1-1) = -1-1$$

$$0x = -2$$

nepl.

$$X_0 = \emptyset$$

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$(x-1)(x+1) \neq 0$$

$$x \neq \pm 1$$

(chci dělit v *)

$$x = \frac{d-1}{x-1}$$

$$x = \frac{d-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$x = \frac{1}{d+1}$$

$$X_d = \left\{ \frac{1}{d+1} \right\}$$

- SHRNUŤ:

d	X
$d = 1$	R
$d = -1$	$\emptyset$
$d \neq \pm 1$	$\left\{ \frac{1}{d+1} \right\}$

③ Řešit v R : $px + 1 = \frac{p^2 - 1}{x}$ $p \in R$ parametr

$$px + 1 = \frac{p^2 - 1}{x} \quad | \cdot x$$

$$xpx + x = p^2 - 1$$

(*) $x(px+1) = p^2 - 1$ | CHCI DĚLIT - ? MOHU
| : $(p+1)$

$$px + 1 = 0$$

$$p = -1$$

dos. do (*)

$$x(-1+1) = 1^2 - 1$$

$$0x = 0 \text{ pl.}$$

$$X_p = D_x = R - \{0\}$$

$$px + 1 \neq 0$$

$$p \neq -1$$

chci dělit

$$x = \frac{p^2 - 1}{p+1} = \frac{(p-1)(p+1)}{(p+1)}$$

$$x = p - 1 (**)$$

! ALE x má být $\neq 0$ (viz D_x)

? KDY BY SE x mohlo = 0

$\Rightarrow$ KDYŽ BY $p-1 = 0$ (viz **)

$$p = 1$$

TEDY $x = 0$ PRO $p = 1 \Rightarrow$ RCE NEMÁ SMYSL

ZÁVĚR

p	X
$p = -1$	$R - \{0\}$
$p = 1$	kec nutná smysl
$p \neq -1, 1$	$\{p-1\}$

[! POUKAD DO D_x NEPATEČNĚ MĚJEME HODNOTY
 $\Rightarrow$ MUSÍME KŮRIT, PRO KTERÉ HODNOTY p
LYCHOM DOSTALI BYLO NEPLAČNÉ HODNOTY x
 $\Rightarrow$ RCE NEMÁ PRO KTERÁKOVĚ HODNOTY p SMYSL]

④ Řešit v $\mathbb{R}$, x mluvnice, $p \in \mathbb{R}$ parametr

a) $px + 3 - p = x$

$\mathcal{O} = \mathbb{R}$
 $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$px - x = p - 3$

(*) $x(p-1) = p-3 \quad | : (p-1)$? MOHU

$p-1=0$

$p=1$

dos. do (*)

$x \cdot 0 = -3$

$(0 = -3)$ nepl.

$\mathcal{K} = \emptyset$

$p-1 \neq 0$

$p \neq 1$

dělím v (*)

$x = \frac{p-3}{p-1}$

$\mathcal{K}_1 = \left\{ \frac{p-3}{p-1} \right\}$

p	$\mathcal{K}$
$p=1$	$\emptyset$ (nemá řš.)
$p \neq 1$	$\left\{ \frac{p-3}{p-1} \right\}$

b) $p^2(x-1) = px - 1$

$\mathcal{O} = \mathbb{R}$
 $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$p^2x - p^2 = px - 1$

$p^2x - px = p^2 - 1$

(*) $x(p^2 - p) = p^2 - 1 \quad | : (p^2 - p)$? MOHU

$p^2 - p = 0$

$p(p-1) = 0$

$p=0$

dos. do (*)

$x \cdot 0 = -1$

$(0 = -1)$

$\mathcal{K}_1 = \emptyset$

$p-1=0$

$p=1$

dos. do (*)

$x \cdot 0 = 0$

$(0=0)$ pl.

$\mathcal{K}_2 = \mathbb{D} = \mathbb{R}$

$p^2 - p \neq 0$

$p(p-1) \neq 0$

$p \neq 0 \wedge p-1 \neq 0$

$p \neq 1$

v (*) lze norm. dělit

$x = \frac{p^2 - 1}{p^2 - p}$

$x = \frac{(p-1)(p+1)}{p(p-1)}$

$x = \frac{p+1}{p}$

$\mathcal{K}_3 = \left\{ \frac{p+1}{p} \right\}$

p	$\mathcal{K}$
$p=0$	$\emptyset$ (nemá řš.)
$p=1$	$\mathbb{R}$
$p \neq 0 \wedge p \neq 1$	$\left\{ \frac{p+1}{p} \right\}$

⑤ Řešit v $\mathbb{R}$, x neznámá, $a \in \mathbb{R}$ parametr

20

$$\frac{2+x}{a+x} = 2a$$

$$\mathcal{D}_x = \mathbb{R} - \{-a\}$$

[pro $x = -a$ NEMÁ RCE SMYSL]

$$2+x = 2a(a+x)$$

$$2+x = 2a^2 + 2ax$$

$$2 - 2a^2 = ax$$

$$(*) \quad ax = 2(1-a^2) \quad |: \overset{? \text{ HODU}}{a}$$

$$a = 0$$

dos. do (*)

$$0x = 2(1-0)$$

$$0x = 2$$

nep.

$$\mathcal{K}_1 = \emptyset$$

$$a \neq 0$$

dělíme

$$x = \frac{2(1-a^2)}{a}$$

ALE $x \neq -a$ (nik $\mathcal{D}$)

? KDY $x = -a$

? KDY $x = -a$

$$\text{Když } \frac{2(1-a^2)}{a} = -a \quad | \cdot a \quad (a \neq 0)$$

$$2(1-a^2) = -a^2$$

$$2 - 2a^2 = -a^2$$

$$a^2 = 2$$

$$|a| = \sqrt{2}$$

$$a = \pm\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ pro $a = \pm\sqrt{2}$ NEMÁ RCE SMYSL

$$\text{pro } a \neq \pm\sqrt{2} \quad a \neq 0 \quad \mathcal{K}_2 = \left\{ \frac{2(1-a^2)}{a} \right\}$$

a	$\mathcal{K}$
$a = 0$	$\emptyset$ (rovnice nemá řešení)
$a = \pm\sqrt{2}$	kec nemá smysl
$a \neq 0$ a $a \neq \pm\sqrt{2}$	$\left\{ \frac{2(1-a^2)}{a} \right\}$

⑥ Řešit v $\mathbb{R}$, y neznámá, $a \in \mathbb{R}$ parametr

20

$$\frac{2a(y-1)}{y+1} = 5$$

$$\mathcal{D}_y = \mathbb{R} - \{-1\}$$

[pro $y = -1$ RCE NEMÁ SMYSL]

$$2a(y-1) = 5(y+1)$$

$$2ay - 2a = 5y + 5$$

$$2ay - 5y = 2a + 5$$

$$(*) \quad y(2a-5) = 2a+5 \quad |: \overset{\text{CHCI DĚLIT - ? HODU}}{(2a-5)}$$

$$2a-5 = 0$$

$$a = \frac{5}{2}$$

dos. do (*)

$$y \cdot (2 \cdot \frac{5}{2} - 5) = 2 \cdot \frac{5}{2} + 5$$

$$0y = 10$$

nep.

$$\mathcal{K}_1 = \emptyset$$

$$2a-5 \neq 0$$

$$a \neq \frac{5}{2}$$

norm. ká dělí

$$y = \frac{2a+5}{2a-5}$$

ALE $y \neq -1$ (nik $\mathcal{D}_y$)

$$? \text{ KDY } y = -1 \Leftrightarrow \frac{2a+5}{2a-5} = -1$$

$$2a+5 = -2a+5$$

$$4a = 0$$

$$a = 0$$

$\Rightarrow$ pro $a = 0$ kec nemá smysl, pro $a \neq 0$ a $a \neq \frac{5}{2}$ $\mathcal{K}_2 = \left\{ \frac{2a+5}{2a-5} \right\}$

a	$\mathcal{K}$
$a = \frac{5}{2}$	$\emptyset$ (kec nemá řešení)
$a \neq \frac{5}{2}$ a $a \neq 0$	$\left\{ \frac{2a+5}{2a-5} \right\}$
$a = 0$	kec nemá smysl